

Содержание

Раздел 1 Поверхности второго порядка

Тема 1 Классификация поверхностей второго порядка

Виды центральных поверхностей второго порядка. Виды нецентральных поверхностей второго порядка. Инварианты уравнений поверхностей второго порядка. Центр поверхностей второго порядка. Преобразование уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду.

Тема 2 Исследование формы поверхностей второго порядка

Метод сечений для исследования формы поверхностей. Эллипсоид и его свойства. Однополостный и двуполостный гиперболоиды. Параболоиды и их свойства. Конические поверхности второго порядка. Цилиндрические поверхности второго порядка.

Раздел 2 Линейные операторы

Тема 3 Пространство линейных операторов

Понятие линейного оператора. Матрица линейного оператора. Соответствие между квадратными матрицами и линейными операторами. Линейные операции над линейными операторами. Произведение линейных операторов. Матричная форма действий операторов.

Тема 4 Свойства линейного оператора при изменении базиса линейного пространства

Преобразование матрицы линейного пространства при переходе к новому базису. Характеристический многочлен. Характеристическое уравнение. Свойства характеристического многочлена линейного оператора. Ранг линейного оператора.

Тема 5 Каноническая форма линейных операторов

Собственные векторы линейного оператора. Свойства собственных векторов. Алгоритм нахождения собственных векторов. Теорема о диагональной матрице линейного оператора. Методы построения диагональной матрицы. Образ и ядро линейного оператора.

Раздел 1 Поверхности второго порядка

Тема 1 Классификация поверхностей второго порядка

Виды центральных поверхностей второго порядка. Виды нецентральных поверхностей второго порядка. Инварианты уравнений поверхностей второго порядка. Центр поверхностей второго порядка. Преобразование уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду

Поверхностью второго порядка называется множество всех точек трехмерного пространства, координаты которых в ПДСК удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}$ – действительные числа, причем $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не равны нулю одновременно.

Уравнение (1) может и не определять действительного геометрического образа, в таких случаях говорят, что уравнение (1) определяет мнимую поверхность второго порядка. В зависимости от значений коэффициентов общего уравнения (1) оно может быть преобразовано с помощью параллельного переноса и поворота системы координат на некоторый угол к одному из 17 канонических видов, каждому из которых соответствует определенный класс поверхностей.

1.1 Центральные поверхности второго порядка.

Поверхности второго порядка, имеющие единственный центр симметрии (центр поверхности второго порядка), называются *центральными поверхностями*.

К центральным поверхностям относятся такие поверхности как: эллипсоид, мнимый эллипсоид, мнимый конус, однополостный гиперboloид, двуполостный гиперboloид, действительный конус.

1.2 Нецентральные поверхности второго порядка.

Поверхности второго порядка без центра симметрии или с неопределенным центром называются *нецентральными поверхностями*.

К центральным поверхностям относятся такие поверхности как: эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, эллиптический цилиндр, мнимый эллиптический цилиндр, пара мнимых пересекающихся плоскостей, гиперболический цилиндр, пара пересекающихся плоскостей, параболический цилиндр, пара параллельных плоскостей, пара мнимых параллельных плоскостей, пара совпадающих плоскостей.

1.3 Инварианты уравнения поверхности второго порядка.

Исследование поверхности второго порядка может быть осуществлено без приведения общего уравнения к каноническому виду. Это достигается совместным рассмотрением значений, так называемых основных инвариантов поверхности второго порядка - выражений, составленных из коэффициентов уравнения (1), значения которых не меняются при параллельном переносе и повороте системы координат:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}, \quad S = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

и семиинвариантов (полуинвариантов) Δ' и Δ'' , которые являются инвариантами относительно поворота системы координат: $\Delta' = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}$, где Δ_{ij} - алгебраическое

дополнение элемента a_{ij} , в Δ ; $\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

Теорема 1.1 (Классификация алгебраических поверхностей второго порядка).

Для любой алгебраической поверхности второго порядка существует ПДСК, в которой уравнение этой поверхности принимает один из следующих семнадцати канонических видов:

невырождающиеся нераспадающиеся поверхности:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - эллипсоид,
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ - мнимый эллипсоид,
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - однополостный гиперболоид,
4. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - двуполостный гиперболоид,
5. $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$, $p, q > 0$ - эллиптический параболоид,
6. $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, $p, q > 0$ - гиперболический параболоид;

вырождающиеся нераспадающиеся поверхности:

цилиндрические поверхности, -

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллиптический цилиндр,
8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - мнимый эллиптический цилиндр,
9. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболический цилиндр,
10. $y^2 = 2px$ - параболический цилиндр;

конические поверхности -

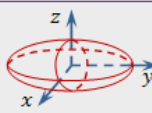
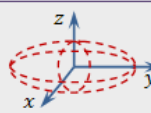
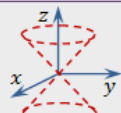
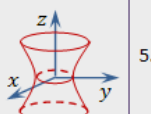
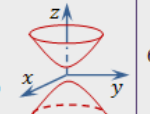
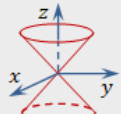
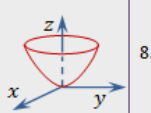
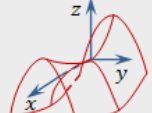
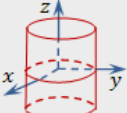
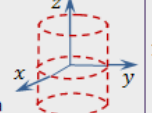
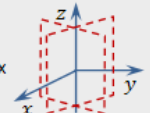
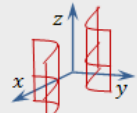
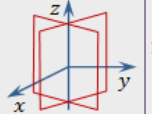
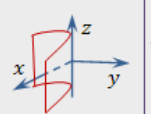
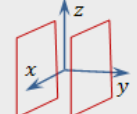
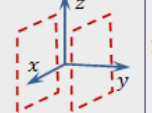
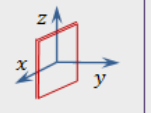
11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ - коническая поверхность,
12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ - мнимая коническая поверхность;

вырождающиеся распадающиеся поверхности:

13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ - пара пересекающихся плоскостей,
14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ - пара мнимых пересекающихся плоскостей,

15. $\frac{x^2}{a^2} = 1$ - пара параллельных плоскостей,
 16. $x^2 + a^2 = 0$ - пара мнимых параллельных плоскостей,
 17. $x^2 = 0$ - пара совпадающих плоскостей.

Теорема дает **аналитические определения** поверхностей второго порядка. Поверхности 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17 называются **вещественными (действительными)**, а поверхности 2, 8, 12, 14, 16 – мнимыми.

Классификация уравнений поверхностей второго порядка			
1.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Уравнение эллипсоида		2.
2.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ Уравнение мнимого эллипсоида		3.
3.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ Уравнение мнимого конуса		4.
4.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Уравнение однополостного гиперболоида		5.
5.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ Уравнение двуполостного гиперболоида		6.
6.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ Уравнение конуса		7.
7.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ Уравнение эллиптического параболоида		8.
8.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ Уравнение гиперболического параболоида		9.
9.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Уравнение эллиптического цилиндра		10.
10.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ Уравнение мнимого эллиптического цилиндра		11.
11.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей		12.
12.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Уравнение гиперболического цилиндра		13.
13.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ Уравнение пары пересекающихся плоскостей		14.
14.	$y^2 = 2px$ Уравнение параболического цилиндра		15.
15.	$y^2 - b^2 = 0$ Уравнение пары параллельных плоскостей		16.
16.	$y^2 + b^2 = 0$ Уравнение пары мнимых параллельных плоскостей		17.
17.	$y^2 = 0$ Уравнение пары совпадающих плоскостей		
Для всех уравнений $a > 0, b > 0, c > 0, p > 0$ Для уравнений 1 и 2 $a \geq b \geq c$ Для уравнений 3,4,5,6,7,9,10 $a \geq b$			

В этих уравнениях $a > 0, b > 0, c > 0, p > 0$, причем $a \geq b \geq c$ в уравнениях 1,2; $a \geq b$ в уравнениях 3,4,5,6,7,9,10.

Таблица. Классификация поверхностей 2-го порядка по инвариантам

	Признаки вида					Название поверхностей	
Центральные	$\delta \neq 0$	Эллиптический тип	$\begin{cases} \delta S > 0 \\ T > 0 \end{cases}$	$\Delta < 0$	Эллипсоид		
				$\Delta > 0$	Мнимый эллипсоид		
				$\Delta = 0$	Мнимый конус		
		Гиперболический тип	$\begin{cases} \delta S \leq 0 \\ T \leq 0 \end{cases}$	$\Delta > 0$	Однополостный гиперболоид		
				$\Delta < 0$	Двуполостный гиперболоид		
				$\Delta = 0$	Действительный конус		
Нецентральные	$\delta = 0$	Параболический тип	$\Delta < 0$		Эллиптический параболоид		
			$\Delta > 0$		Гиперболический параболоид		
			$T > 0$	$\Delta' S < 0$		Эллиптический цилиндр	
				$\Delta' S > 0$		Мнимый эллиптический цилиндр	
				$\Delta' = 0$		Пара мнимых пересекающихся плоскостей	
			$T < 0$	$\Delta' \neq 0$		Гиперболический цилиндр	
				$\Delta' = 0$		Пара пересекающихся плоскостей	
			$T = 0$	$\Delta' \neq 0$		Параболический цилиндр	
				$\Delta' = 0$	$\Delta'' < 0$	Пара параллельных плоскостей	
					$\Delta'' > 0$	Пара мнимых параллельных плоскостей	
					$\Delta'' = 0$	Пара совпадающих плоскостей	

1.4 Центр поверхности второго порядка.

Координаты центра определяются решением системы:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

1.5 Преобразование уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.

Пусть поверхности второго порядка в ПДСК задана уравнением (1).

Преобразование координат при параллельном переносе осей координат:

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0, \quad z = Z + z_0$$

или

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0, \quad Z = z - z_0,$$

где x, y, z – координаты некоторой точки в старой системе координат $Oxyz$; X, Y, Z – координаты той же точки в новой системе координат $O'XYZ$; x_0, y_0, z_0 – координаты нового начала O' в старой системе координат.

Преобразование координат при повороте осей координатных:

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha_1 + Y \cos \alpha_2 + Z \cos \alpha_3; \\ y = X \cos \beta_1 + Y \cos \beta_2 + Z \cos \beta_3; \\ z = X \cos \gamma_1 + Y \cos \gamma_2 + Z \cos \gamma_3, \end{cases}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – углы, образуемые осью Ox соответственно с новыми осями OX, OY, OZ ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – углы, образуемые осью Oy и осью Oz соответственно с новыми осями OX, OY, OZ (или $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углом, образуемые новой осью OX соответственно со старыми осями Ox, Oy, Oz и т.д.)

Преобразование координат в общем виде:

Формулы, связывающие старые и новые координаты точек, имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + X \cos \alpha_1 + Y \cos \alpha_2 + Z \cos \alpha_3; \\ y = y_0 + X \cos \beta_1 + Y \cos \beta_2 + Z \cos \beta_3; \\ z = z_0 + X \cos \gamma_1 + Y \cos \gamma_2 + Z \cos \gamma_3. \end{cases}$$

где x, y, z – координаты некоторой точки в старой системе координат $Oxyz$, X, Y, Z – координаты той же точки в новой системе координат $O'XYZ$, x_0, y_0, z_0 – координаты нового начала O' в старой системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – углы, образуемые осью Ox соответственно с новыми осями OX, OY, OZ ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – углы, образуемые осью Oy и осью Oz соответственно с новыми осями OX, OY, OZ (или $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углом, образуемые новой осью OX соответственно со старыми осями Ox, Oy, Oz и т.д.)

Вопросы для самоконтроля:

- 1 Что называется поверхностью второго порядка?
- 2 Какая поверхность второго порядка называется центральной? Укажите, какие поверхности второго порядка относятся к ним.
- 3 Какая поверхность второго порядка называется нецентральной? Укажите, какие поверхности второго порядка относятся к ним.
- 4 Укажите инварианты поверхностей второго порядка.
- 5 Сформулируйте классификационную теорему.
- 6 Какие поверхности второго порядка относятся к действительным поверхностям, а какие к мнимым?
- 7 Как определяется поверхность второго порядка по инвариантам? Укажите классификационную таблицу поверхностей второго порядка по инвариантам.
- 8 Как находится центр поверхности второго порядка?
- 9 Как преобразуются координаты поверхности второго порядка при параллельном переносе осей координат?
- 10 Как преобразуются координаты поверхности второго порядка при повороте осей координат?
- 11 Укажите преобразование координат поверхности второго порядка в общем виде?

Тема 2 Исследование формы поверхностей второго порядка

Метод сечений для исследования формы поверхностей. Эллипсоид и его свойства. Однополостный и двуполостный гиперболоиды. Параболоиды и их свойства. Конические поверхности второго порядка. Цилиндрические поверхности второго порядка.

2.1 Метод сечений для исследования форм поверхностей второго порядка.

В теории поверхностей второго порядка классифицируют и изучают различные виды поверхностей. Методом их изучения является так называемый *метод сечения*: исследуются сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным или самими координатными плоскостями, и по виду сечений делается вывод о форме поверхности.

2.2 Эллипсоид и его свойства.

Эллипсоидом называется поверхность второго порядка, которая в ПДСК определяется каноническим уравнением

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{a}^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

В частности, если $a = b = c$, то получаем *сферу* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ с центром в начале координат и радиусом a . Числа a, b, c называются *полуосями* эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется *трехосным*. Точки пересечения эллипсоида с осями координат: $A_1(-a; 0; 0)$, $A_2(a; 0; 0)$, $B_1(0; -b; 0)$, $B_2(0; b; 0)$, $C_1(0; 0; -c)$, $C_2(0; 0; c)$ называются его *вершинами*.

Оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипсоида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии.

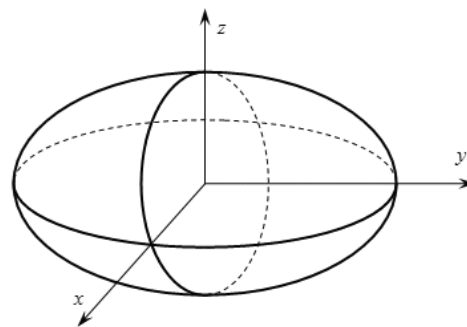
Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью xOy :

$z = 0$. Оно задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{a}^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

и представляет собой эллипс с каноническим уравнением

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{a}^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} = 1.$$



Рассматривая аналогично сечения эллипсоида координатными плоскостями xOz : $y = 0$ и yOz : $x = 0$, а также плоскостями, им параллельными ($x = h_1$, $y = h_2$, $z = h_3$), получаем кривые второго порядка *эллиптического* типа. Это – либо эллипс (при $h_1 < a$, $h_2 < b$, $h_3 < c$), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при $|h_1| = a$, $|h_2| = b$, $|h_3| = c$), либо мнимый эллипс (при $h_1 > a$, $h_2 > b$, $h_3 > c$).

Поверхностью вращения второго порядка называется поверхность, образованная вращением линии второго порядка её оси.

Эллипсоид вращения. Например, при вращении эллипса $\frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{a}^2} + \frac{\sigma^2}{c^2} = 1$, $x = 0$ вокруг оси Oz получим поверхность, которая называется эллипсоидом вращения.

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{b^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2.3 Однополостный и двуполостный гиперболоиды.

а) Однополостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка, которая в ПДСК определяется каноническим уравнением

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{a}^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Оси канонической системы координат являются осями симметрии однополостного гиперболоида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии. Оси абсцисс и ординат пересекают однополостный гиперболоид в точках $A_1(-a; 0; 0)$, $A_2(a; 0; 0)$, $B_1(0; -b; 0)$, $B_2(0; b; 0)$, которые называются его *вершинами*. Ось аппликат Oz , не имеющая с гиперболоидом общих действительных точек, называется его *мнимой осью*.

Если рассмотреть сечения однополостного гиперболоида плоскостью xOy : $z = 0$ или плоскостями, параллельными ей ($z = h_3$), то в сечении

получаются эллипсы. Эллипс $\frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{a}^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} = 1$ называется *горловым*.

Теперь возьмем сечение однополостного гиперболоида плоскостью xOz : $y = 0$. Оно задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{a}^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

и представляет собой гиперболу с действительной осью Ox :

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{a}^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассматривая аналогично сечения гиперболоида плоскостью yOz : $x = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскостям xOz : $y = h_2$ и yOz : $x = h_1$, получаем кривые второго порядка *гиперболического* типа. Это – либо гипербола (при $|h_1| \neq a$, $|h_2| \neq b$), либо пара пересекающихся прямых (при $|h_1| = a$, $|h_2| = b$). Например, сечение однополостного гиперболоида плоскостью $x = a$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{a}^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a. \end{cases}$$

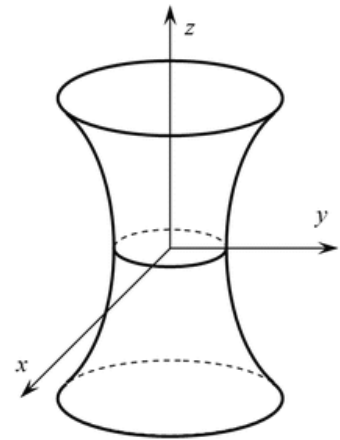
и представляет собой пару пересекающихся прямых с каноническим уравнением

$$\frac{\sigma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

б) Двуполостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка, которая в ПДСК определяется каноническим уравнением

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{a}^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Ось аппликат Oz канонической системы координат является осью симметрии двуполостного гиперболоида, начало координат – его центром симметрии, а координатные плоскости – плоскостями симметрии. Ось аппликат пересекает гиперболоид в точках



$C_1(0;0;-c)$, $C_2(0;0;-c)$, которые называются его *вершинами*. Сама ось аппликат называется *действительной осью* гиперboloида.

Если рассмотреть сечение двуполостного гиперboloида координатными плоскостями xOz : $y=0$ и yOz : $x=0$, и плоскостями, им параллельными ($x=h_1, y=h_2$), то в сечении получаются гиперболы.

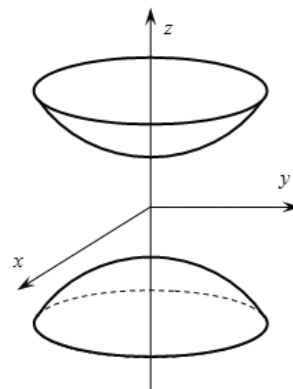
Рассматривая аналогично сечения гиперboloида плоскостью xOy : $z=0$, а также плоскостями, параллельными плоскости xOy : $z=h$, получаем кривые второго порядка *эллиптического* типа. Это – либо эллипс (при $|h|>c$), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при $|h|=c$), либо мнимый эллипс (при $|h|<c$). Например, при $|h|>c$ сечение двуполостного гиперboloида плоскостью $z=h$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\sigma}^2}{a^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h, \end{cases}$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем:

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{a^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

и каноническое уравнение эллипса $\frac{\tilde{\sigma}^2}{\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)a^2} + \frac{\sigma^2}{\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)b^2} = 1$.



2.4 Параболоиды и их свойства.

а) *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность второго порядка, которая в ПДСК определяется каноническим уравнением

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{a^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} = 2z.$$

Ось аппликат Oz канонической системы координат является единственной осью симметрии эллиптического параболоида, плоскости xOz и yOz – плоскостями симметрии. Ось аппликат, называемая *осью* эллиптического параболоида, пересекает его в начале координат, эта точка называется *вершиной* параболоида.

Если рассмотреть сечение эллиптического параболоида координатными плоскостями xOz : $y=0$ и yOz : $x=0$, и плоскостями, им параллельными ($x=h_1, y=h_2$), то в сечении получаются параболы. Например, сечение эллиптического параболоида плоскостью $y=h_2$ задается системой уравнений

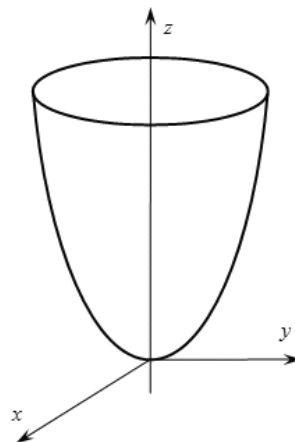
$$\begin{cases} \frac{\tilde{\sigma}^2}{a^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} = 2z, \\ y = h_2, \end{cases}$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем:

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} = 2z$$

и уравнение

параболы $\tilde{\sigma}^2 = 2a^2z - \frac{a^2h_2^2}{b^2}$.



Получаемые таким образом параболы лежат в параллельных плоскостях, отличаясь лишь положением в пространстве.

Рассматривая аналогично сечения эллиптического параболоида плоскостью xOy : $z = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскости xOy : $z = h$, получаем кривые второго порядка *эллиптического* типа. Это – либо эллипс (при $h > 0$), либо пара мнимых пересекающихся прямых, т.е. точка (при $h = 0$), либо мнимый эллипс (при $h < 0$).

б) Гиперболическим параболоидом называется поверхность второго порядка, которая в ПДСК определяется каноническим уравнением

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{b^2} = 2z.$$

Ось аппликат Oz канонической системы координат является единственной осью симметрии гиперболического параболоида, плоскости xOz и yOz – плоскостями симметрии. Ось аппликат, называемая *осью* гиперболического параболоида, пересекает его в начале координат; эта точка называется *вершиной* параболоида.

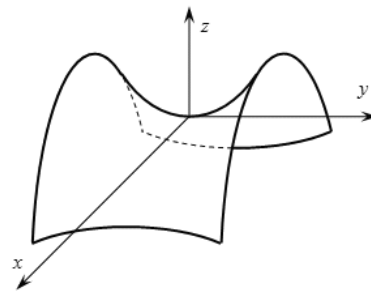
Если рассмотреть сечение гиперболического параболоида координатными плоскостями xOz : $y = 0$ и yOz : $x = 0$, и плоскостями, им параллельными ($x = h_1, y = h_2$), то в сечении получаются параболы. Например, сечение гиперболического параболоида плоскостью $x = h_1$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\sigma}^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{b^2} = 2z, \\ x = h_1, \end{cases}$$

откуда при подстановке второго уравнения в первое последовательно получаем:

$$\frac{h_1^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{b^2} = 2z \text{ и уравнение параболы } y^2 = -2b^2z + \frac{b^2h_1^2}{a^2}.$$

Рассматривая аналогично сечения гиперболического параболоида плоскостью xOy : $z = 0$, а также плоскостями, параллельными плоскости xOy : $z = h$, получаем кривые второго порядка *гиперболического* типа. Это либо гипербола (при $|h| > 0$), либо пара пересекающихся прямых (при $h = 0$). Таким образом, по форме гиперболический параболоид напоминает седло, эту поверхность часто называют *седловой*.



2.5 Конические поверхности второго порядка.

Конусом называется поверхность второго порядка, которая в ПДСК определяется каноническим уравнением

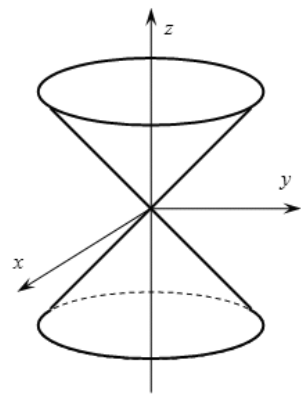
$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{a^2} + \frac{\sigma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Эта поверхность второго порядка состоит из прямых, пересекающихся в одной точке – *вершине* конуса. Действительно, если точка с координатами $(x_0; y_0; z_0)$ удовлетворяет уравнению конуса, то ему удовлетворяют также точки с координатами

$$x = x_0t, y = y_0t, z = z_0t,$$

при любом значении параметра t . Записанные уравнения являются параметрическими уравнениями прямой, проходящей через начало координат и точку $(x_0; y_0; z_0)$. Конус состоит из таких прямых, называемых *образующими* конуса. Ось аппликат канонической системы координат называется его осью.

Оказывается, плоскость, проходящая через вершину конуса, либо не пересекает его в другой точке, либо пересекает по двум образующим, либо касается вдоль образующей. Любая плоскость, параллельная этим плоскостям, в первом случае пересекает конус по *эллипсу*, во втором случае – пересекает по *гиперболе*, в третьем случае – по *параболе*. Поэтому эллипс, гиперболу, параболу часто называют *коническими сечениями*.



2.6 Цилиндрические поверхности второго порядка

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (*образующей*), движущейся вдоль некоторой линии (*направляющей*) и остающейся параллельной исходному направлению.

Цилиндром второго порядка называется цилиндрическая поверхность, направляющей которой является эллипс (окружность), гипербола или парабола.

Рассмотрим цилиндры второго порядка, у которых образующая параллельна оси Oz.

1). *Эллиптический цилиндр* (рис.10.5).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В частности эллиптический цилиндр имеет в качестве направляющей окружность. Его уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

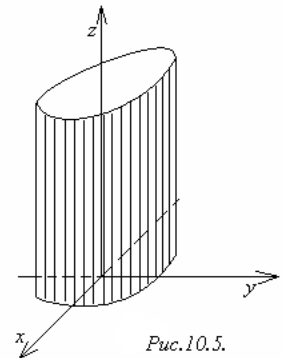


Рис.10.5.

2). *Гиперболический цилиндр* (рис. 10.6)

$$-\frac{\delta^2}{a^2} + \frac{\delta^2}{a^2} = 1.$$

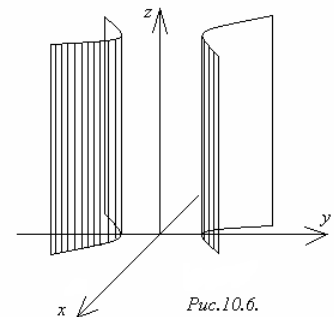


Рис.10.6.

3) *Параболический цилиндр* (рис. 10.7).

$$x^2 = 2py$$

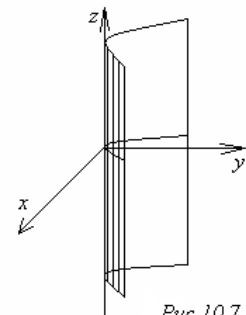


Рис.10.7.

Вопросы для самоконтроля:

- 1 В чем заключается метод сечения?
- 2 Какая поверхность второго порядка называется эллипсоидом? Укажите его свойства. Как изображается эллипсоид в ПДСК?
- 3 Какая поверхность называется поверхностью вращения?
- 4 Как задается эллипсоид вращения? Изобразите его в ПДСК.
- 5 Какая поверхность второго порядка называется однополостным гиперboloидом? Изобразите его в ПДСК.
- 6 Какая поверхность второго порядка называется двуполостным гиперboloидом? Изобразите его в ПДСК.
- 7 Какая поверхность второго порядка называется параболоидом? Укажите его свойства.
- 8 Какая поверхность второго порядка называется эллиптическим параболоидом? Изобразите его в ПДСК.
- 9 Какая поверхность второго порядка называется гиперболическим параболоидом? Изобразите его в ПДСК.
- 10 Какая поверхность второго порядка называется конической поверхностью (конусом)? Укажите виды сечения конической поверхности.
- 11 Какая поверхность второго порядка называется цилиндрической поверхностью?
- 12 Какая поверхность второго порядка называется эллиптическим цилиндром? Изобразите его в ПДСК.
- 13 Какая поверхность второго порядка называется гиперболическим цилиндром? Изобразите его в ПДСК.
- 14 Какая поверхность второго порядка называется параболическим цилиндром? Изобразите его в ПДСК.

Раздел 2 Линейные операторы

Тема 3 Пространство линейных операторов

Понятие линейного оператора. Матрица линейного оператора. Соответствие между квадратными матрицами и линейными операторами. Линейные операции над линейными операторами. Произведение линейных операторов. Матричная форма действий операторов.

3.1 Понятие линейного оператора

Пусть V и W – линейные пространства над одним и тем же полем P . Отображение $f: V \rightarrow W$, удовлетворяющее условиям

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in V$; (1)

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для любого $x \in V$ и любого $\alpha \in P$. (2)

называется *линейным отображением* пространства V в пространство W . Условие (1) называется *условием аддитивности* отображения f . Условие (2) называется *условием однородности* отображения f .

Различают несколько типов линейных отображений линейных пространств: линейные операторы, изоморфизмы, линейные преобразования (автоморфизмы).

Линейным оператором пространства V называется *линейное отображение* пространства V в себя.

Взаимно однозначное линейное отображение линейного пространства V в пространство W называется *изоморфизмом* линейных пространств V и W .

Взаимно однозначное линейное отображение пространства V в себя называется *линейным преобразованием* или *автоморфизмом* линейного пространства V .

Если пространство W представляет собой комплексную плоскость, то линейный оператор $f: V \rightarrow W$, называется *линейной формой* или *линейным функционалом*.

Чтобы избежать путаницы в терминах линейных отображений, полезно руководствоваться следующей таблицей

Термин	Выделяющее свойство
Линейное отображение	$f: V \rightarrow W$
Линейный оператор	$f: V \rightarrow V$
Изоморфизм	$f: V \rightarrow W$ f – биекция
Линейное преобразование (автоморфизм)	$f: V \rightarrow V$ f – биекция

Лемма 3.1 Пусть V и W – линейные пространства над полем P . Отображение $f: V \rightarrow W$ является линейным отображением пространства V в пространство W тогда и только тогда, когда $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для любых $x, y \in V$ и любых $\alpha, \beta \in P$.

Лемма 3.2 Пусть V и W – линейные пространства над полем P , $f: V \rightarrow W$ – линейное отображение. Тогда:

1) если θ и θ' – нулевые векторы соответственно пространств V и W , то $f(\theta) = \theta'$;

2) $f(-x) = -f(x)$ при любом $x \in V$;

3) при любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ и при любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in P$ имеет место равенство

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

4) если система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ пространства V линейно зависима, то линейно зависима и система векторов $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

Следующая теорема показывает, что для того, чтобы задать линейное отображение из V в W , достаточно задать образы векторов некоторого базиса пространства V , причем этими образами могут быть произвольные векторы пространства W .

Теорема 3.3 Пусть даны линейные пространства V и W над полем P , базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V и произвольная система векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ пространства W . Тогда существует единственное линейное отображение $f: V \rightarrow W$, при котором $f(e_i) = a_i, i = \overline{1, n}$.

Следствие 3.4 Линейный оператор f линейного пространства V над полем P однозначно определяется векторами $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$, где $e_1, e_2, \dots, e_n$ – некоторый базис V .

3.2 Матрица линейного оператора

Пусть f – линейный оператор n -мерного линейного пространства V над полем P , $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис этого пространства. Тогда $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ – векторы из V .

Разложим их по векторам базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda_{11}e_1 + \lambda_{12}e_2 + \dots + \lambda_{1n}e_n, \\ f(e_2) = \lambda_{21}e_1 + \lambda_{22}e_2 + \dots + \lambda_{2n}e_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f(e_n) = \lambda_{n1}e_1 + \lambda_{n2}e_2 + \dots + \lambda_{nn}e_n. \end{cases} \quad (3.1)$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора f в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$* .

Пусть

$$[e] = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} - \text{матрица-столбец базиса } e_1, e_2, \dots, e_n, [f(e)] = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ \dots \\ f(e_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда система равенств (3.1) равносильна матричному равенству $[f(e)] = A[e]$.

Теорема 3.5 Пусть f – линейный оператор n -мерного линейного пространства V над полем P , $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис пространства V , $x \in V$. Тогда координатная строка вектора $f(x)$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ равна координатной строке вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, умноженной на матрицу линейного оператора f в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Следствие 3.6 Если A – матрица линейного оператора f линейного пространства V_n , то $(f(x)) = (x)A$ для любого вектора $x \in V_n$.

Лемма 3.7. Пусть A и B – $(n \times n)$ -матрицы над полем P . Если $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4)A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4)B$ для любой строки $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4)$, $\alpha_i \in P$, то $A = B$.

3.3 Соответствие между квадратными матрицами и линейными операторами

Две матрицы $A, B \in M(n, P)$ называются подобными, если существует невырожденная матрица $T \in M(n, P)$ такая, что $B = TAT^{-1}$.

Следующая теорема устанавливает связь между матрицами одного и того же линейного оператора в различных базисах.

Теорема 3.8 Пусть f – линейный оператор n -мерного линейного пространства V над полем P , $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ – базисы пространства V , T – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Если A – матрица оператора f в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, B – матрица оператора f в базисе $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, то $B = TAT^{-1}$.

Теорема 3.9 Отношение подобия матриц на множестве $M(n, P)$ является отношением эквивалентности.

Из теоремы 3.8 следует, что матрицы одного линейного оператора n -мерного пространства V над полем P в разных базисах подобны, причем матрица T , связывающая эти матрицы отношением подобия, совпадает с матрицей перехода от «старого» базиса к «новому». Таким образом, каждому линейному оператору пространства V соответствует класс подобных между собой матриц из $M(n, P)$, эти матрицы представляют данный линейный оператор в различных базисах.

Из теоремы 3.9 следует, что множество $M(n, P)$ разбивается на попарно непересекающиеся классы подобных матриц. Матрицы входят в один и тот же класс тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора в различных базисах.

3.4 Линейные операции над линейными операторами

Пусть f, g – линейные операторы пространства V над полем P . Суммой операторов f и g называется отображение $f+g$ пространства V в себя, определяемое для каждого $x \in V$ формулой $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Произведением скаляра $\lambda \in P$ и линейного оператора f называется отображение λf пространства V в себя, определяемое для каждого $x \in V$ формулой $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Лемма 3.10 Если f, g – линейные операторы пространства V над полем P , $\lambda \in P$, то $f+g$ и λf – также линейные операторы пространства V .

3.5 Произведение линейных операторов

В дальнейшем множество всех линейных операторов пространства V над полем P будем обозначать через $\text{Hom}_P(V)$ или $L(V)$. Проверка аксиом линейного пространства показывает, что множество $\text{Hom}_P(V)$ является линейным пространством над полем P .

Пусть f, g – линейные операторы пространства V . Произведением операторов f и g называется отображение $f \cdot g$ пространства V в себя, определяемое для каждого $x \in V$ формулой $(fg)(x) = f(g(x))$.

Лемма 3.11 Если $f, g \in \text{Hom}_P V$, то $f \cdot g \in \text{Hom}_P V$.

3.6 Матричная форма действий операторов

Лемма 3.12 Пусть f, g – линейные операторы линейного пространства V_n над полем P , а A и B – матрицы операторов f и g в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Тогда матрицами операторов $f + g$ и λf , $\lambda \in P$, в том же базисе являются матрицы $A+B$ и λA .

Теорема 3.13 Пусть V – n -мерное линейное пространство над полем P . Тогда $\text{Hom}_P V \cong M(n, P)$.

Лемма 3.14 Пусть f, g – линейные операторы пространства V_n , A, B – матрицы операторов f и g соответственно в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Тогда BA – матрица оператора $f \cdot g$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Вопросы для самоконтроля:

- 1 Какое отображение называется линейным?
- 2 Что называется линейным оператором?
- 3 Какое отображение называется изоморфизмом?
- 4 Какое отображение называется линейным преобразованием или автоморфизмом?
- 5 Какое отображение называется линейной формой или линейным функционалом?
- 6 Сформулируйте теорему о существовании единственного линейного оператора.
- 7 Как составляется матрица линейного оператора?
- 8 Какие матрицы называются подобными?
- 9 Укажите соответствие между квадратными матрицами и линейным оператором.
- 10 Какие линейные операции можно производить над линейными операторами?
- 11 Как осуществляется произведение линейных операторов?
- 12 Укажите свойства матричной формы линейных операторов?

Тема 4 Свойства линейного оператора при изменении базиса линейного пространства

Преобразование матрицы линейного пространства при переходе к новому базису. Характеристический многочлен. Характеристическое уравнение. Свойства характеристического многочлена линейного оператора. Ранг линейного оператора. Образ и ядро линейного оператора.

4.1 Преобразование матрицы линейного пространства при переходе к новому базису

Следующая теорема устанавливает связь между матрицами одного и того же линейного оператора в различных базисах.

Теорема 4.1 Пусть f – линейный оператор n -мерного линейного пространства V над полем P , $e_1, e_2, \dots, e_n$ «старый» и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ «новый» – базисы пространства V , T – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Если A – матрица оператора f в «старом» базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, B – матрица оператора f в «новом» базисе $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$, то $B = TAT^{-1}$; и наоборот $A = T^{-1}BT$.

4.2 Характеристический многочлен

Пусть $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ -матрица над полем P , λ – некоторая переменная. Матрица

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

называется *характеристической матрицей матрицы A* , другими словами – это λ -матрица. Многочлен $|A - \lambda E| = \det(A - \lambda E) = \Delta_A(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом матрицы A* . Нетрудно заметить, что *степень характеристического* многочлена равна порядку n характеристической матрицы.

Лемма 4.2 Характеристические многочлены подобных матриц равны.

Лемма 4.2 дает возможность называть характеристический многочлен некоторой матрицы линейного оператора f характеристическим многочленом оператора f .

4.3 Характеристическое уравнение

Уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ называется *характеристическим уравнением* матрицы A . Так как характеристический многочлен имеет n -ю степень, то характеристическое уравнение – это алгебраическое уравнение n -го порядка. характеристический многочлен можно представить в виде

$$\det(A - \lambda E) = a_n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – корни многочлена кратности $n_1, n_2, \dots, n_k$ соответственно, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Другими словами, характеристический многочлен имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

9.2.4 Свойства характеристического многочлена линейного оператора

Теорема 4.3 Характеристический многочлен линейного оператора f не зависит от выбора базиса, в котором представлена его матрица.

Теорема 4.4 Характеристический многочлен матрицы не меняется

1. при ее транспонировании: $\det(A - \lambda E) = \det(A^T - \lambda E)$;

2. при переходе к подобной матрице: если $B = C^{-1}AC$ при произвольной неособенной матрице C , то $\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E)$.

Теорема 4.5 Пусть матрица A имеет порядок $m \times n$, а B – порядок $n \times m$. Тогда эти матрицы допускают умножение в любом порядке, т.е. определены AB и BA и оба произведения будут квадратными матрицами – порядков m и n соответственно. Тогда характеристические многочлены этих произведений различаются лишь на степень λ :

$$\lambda^n \det(AB - \lambda E) = \lambda^m \det(BA - \lambda E).$$

Если матрицы A и B – квадратные одинакового порядка, то характеристические многочлены матриц AB и BA тождественны.

Теорема 4.6 Если характеристический полином матрицы A равен $f(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ и $a_n \neq 0$, то характеристический многочлен матрицы A^{-1} равен

$$f^*(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{a_n} f(1/\lambda) = \frac{(-1)^n}{a_n} [(-1)^n + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_n \lambda^n].$$

Теорема 4.7 (Гамильтона-Кэли). Результатом подстановки в характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$ самой матрицы A будет нулевая матрица:

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n,$$

$$\text{следовательно } (-1)^n A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n = 0_{n \times n}$$

В литературе эта теорема обычно приводится в иной формулировке: матрица является корнем своего характеристического полинома.

Пример 4.8 Для $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 - (a_{11} + a_{22}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.2.5 Образ, ядро и ранг линейного оператора.

Пусть f – линейное отображение пространства V в пространство W . Множество

$$\text{Ker} f = \{x \in V \mid f(x) = \theta' \in W\}$$

называется *ядром линейного отображения* f . Множество

$$\text{Im} f = \{f(x) \in W \mid x \in V\}$$

называется *образом линейного отображения* f .

Если f – линейный оператор пространства V , то говорят о ядре и образе оператора.

Лемма 4.9 Ядро и образ линейного оператора пространства V являются линейными подпространствами пространства V .

На практике ядро и образ линейного оператора находится, как правило, с помощью следующей теоремы.

Теорема 4.10 Пусть f – линейный оператор пространства V_n , A – матрица оператора f в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Тогда:

$$1) \text{Im} f = L(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n));$$

$$2) \text{вектор } x \in \text{Ker} f \text{ тогда и только тогда, когда } (x)A = (00\dots 0).$$

Рангом линейного оператора f конечномерного линейного пространства V называется размерность подпространства $\text{Im} f$. *Дефектом линейного оператора* f конечномерного пространства V называется размерность пространства $\text{Ker} f$. Итак,

$$\text{rank} f = \dim \text{Im} f, \text{ deff} = \dim \text{Ker} f.$$

Теорема 4.11 Сумма ранга и дефекта линейного оператора f конечномерного линейного пространства V равна размерности V : $\dim V = \text{rank} f + \text{deff}$.

Вопросы для самоконтроля:

- 1 Укажите преобразование матрицы линейного пространства при переходе к новому базису?
- 2 Какая матрица называется характеристической?
- 3 Что называется характеристическим многочленом?
- 4 Какое уравнение называется характеристическим?
- 5 Укажите свойства характеристических многочленов линейного оператора.
- 6 Что называется образом линейного оператора?
- 7 Что называется ядром линейного оператора?
- 8 Что называется рангом линейного оператора?
- 9 Как на практике вычисляется образ и ядро линейного оператора?
- 10 Что называется дефектом линейного оператора?
- 11 Укажите связь ранга и дефекта линейного оператора.

Тема 5 Каноническая форма линейных операторов

Собственные векторы линейного оператора. Свойства собственных векторов. Алгоритм нахождения собственных векторов. Теорема о диагональной матрице линейного оператора. Методы построения диагональной матрицы.

5.1 Собственные векторы линейного оператора

Пусть f – линейный оператор линейного пространства V над полем P , x – ненулевой вектор пространства V . Если $f(x) = \lambda \cdot x$, $\lambda \in P$, то скаляр λ называется *собственным значением оператора f* , а вектор x – *собственным вектором линейного оператора f* , принадлежащим собственному значению λ . Находить собственные значения линейного оператора позволяет следующая теорема.

Теорема 5.1 Собственными значениями линейного оператора f конечномерного линейного пространства V над полем P являются все, принадлежащие полю P , корни характеристического многочлена этого оператора и только они.

Пусть x – собственный вектор линейного оператора f , принадлежащий собственному значению λ . Из теоремы 5.1 следует, что координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V удовлетворяют системе уравнений

$$(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)(A - \lambda E) = (0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (2)$$

где A – матрица линейного оператора f в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Решая систему (2), находим координаты собственных векторов оператора f , принадлежащих собственному значению λ .

Пусть A – матрица линейного оператора n -го порядка. Ненулевой столбец $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$,

удовлетворяющий условию

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \quad (3)$$

называется *собственным вектором* матрицы A . Число λ в равенстве (3) называется *собственным значением* матрицы A . Говорят, что собственный вектор x соответствует (принадлежит) собственному значению λ .

Теорема 5.2 (о собственных значениях матрицы). Все корни характеристического многочлена (характеристического уравнения) и только они являются собственными значениями матрицы.

5.2 Свойства собственных векторов

Совокупность всех собственных значений матрицы (с учетом их кратностей) называют ее *спекром*.

Спектр матрицы называется *простым*, если собственные значения матрицы попарно различные (все корни характеристического уравнения простые).

Пусть A – матрица линейного оператора n -го порядка.

Свойство 5.3 Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство: В самом деле, пусть s_1 и s_2 – собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2 , причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Составим произвольную линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее нулевому столбцу:

$$\alpha_1 \cdot s_1 + \alpha_2 \cdot s_2 = 0. \quad (4)$$

Надо показать, что это равенство возможно только в тривиальном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Действительно, умножая обе части на матрицу A и подставляя $A \cdot s_1 = \lambda_1 \cdot s_1$ и $A \cdot s_2 = \lambda_2 \cdot s_2$ имеем

$$A(\alpha_1 \cdot s_1 + \alpha_2 \cdot s_2) = 0 \Leftrightarrow A\alpha_1 s_1 + A\alpha_2 s_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda_1 s_1 + \alpha_2 \lambda_2 s_2 = 0$$

Прибавляя к последнему равенству равенство (4), умноженное на $(-\lambda_2)$, получаем $\alpha_1 \lambda_1 s_1 - \alpha_1 \lambda_2 s_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) s_1 = 0$.

Так как $s_1 \neq 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, делаем вывод, что $\alpha_1 = 0$. Тогда из (4) следует, что и $\alpha_2 = 0$ (поскольку $s_2 \neq 0$). Таким образом, собственные векторы s_1 и s_2 линейно независимы. Доказательство для любого конечного числа собственных векторов проводится по индукции.

Свойство 5.4 Ненулевая линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному собственному значению, является собственным вектором, соответствующим тому же собственному значению.

Доказательство: Действительно, если собственному значению λ соответствуют собственные векторы $s_1, s_2, \dots, s_k$, то из равенств $S_i = \lambda s_i$, $i = \overline{1, k}$, следует, что вектор $s = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_k s_k$ также собственный, поскольку:

$$As = A(\alpha_1 \cdot s_1 + \dots + \alpha_k \cdot s_k) = \alpha_1 \lambda s_1 + \dots + \alpha_k \lambda s_k = \lambda(\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_k s_k) = \lambda s.$$

Свойство 5.5 Пусть $(A - \lambda E)^+$ – присоединенная матрица для характеристической матрицы $(A - \lambda E)$. Если λ_0 – собственное значение матрицы A , то любой ненулевой столбец матрицы $(A - \lambda E)^+$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_0 .

Доказательство: В самом деле, применяя формулу $(A - \lambda E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \lambda E)} (A - \lambda E)^+$ имеем $(A - \lambda E) \cdot (A - \lambda E)^+ = \det(A - \lambda E) \cdot E$. Подставляя корень λ_0 , получаем $(A - \lambda_0 E) \cdot (A - \lambda_0 E)^+ = 0$. Если s – ненулевой столбец матрицы $(A - \lambda E)^+$, то $(A - \lambda_0 E)s = 0 \Leftrightarrow As = \lambda_0 s$. Значит, s – собственный вектор матрицы A .

Замечание 5.6 По основной теореме алгебры характеристическое уравнение имеет n в общем случае комплексных корней (с учетом их кратностей). Поэтому собственные значения и собственные векторы имеются у любой квадратной матрицы. Причем собственные значения матрицы определяются однозначно (с учетом их кратности), а собственные векторы – неоднозначно.

Замечание 5.7 Чтобы из множества собственных векторов выделить максимальную линейно независимую систему собственных векторов, нужно для всех раз личных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ записать одну за другой системы линейно независимых собственных векторов, в частности, одну за другой фундаментальные системы решений однородных систем

$$(A - \lambda_1 E)x = 0, (A - \lambda_2 E)x = 0, \dots, (A - \lambda_k E)x = 0.$$

Полученная система собственных векторов будет линейно независимой в силу свойства 5.3 собственных векторов.

Замечание 5.8 Для простого корня $\lambda = \lambda_0$ характеристического уравнения соответствующий собственный вектор можно найти, раскладывая определитель матрицы $(A - \lambda_0 E)$ по одной из строк. Тогда ненулевой вектор, компоненты которого равны алгебраическим дополнениям элементов одной из строк матрицы $(A - \lambda_0 E)$, является собственным вектором.

5.3 Алгоритм нахождения собственных векторов

Для нахождения собственных векторов и собственных значений квадратной матрицы A n -го порядка надо выполнить следующие действия.

1. Составить характеристический многочлен матрицы $\det(A - \lambda E) = \Delta_A(\lambda)$.

2. Найти все различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ (кратности $n_1, n_2, \dots, n_k$ ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) корней определять не нужно).

3. Для корня $\lambda = \lambda_1$ найти фундаментальную систему $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-r}$ решений однородной системы уравнений $(A - \lambda_1 E)x = 0$, где $r = \text{rg}(A - \lambda_1 E)$.

Для этого можно использовать либо алгоритм решения однородной системы.

4. Записать линейно независимые собственные векторы матрицы A , отвечающие собственному значению λ_1 : $s_1 = C_1 \varphi_1$, $s_2 = C_2 \varphi_2$, ..., $s_{n-r} = C_{n-r} \varphi_{n-r}$ (5)

где $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ – отличные от нуля произвольные постоянные. Совокупность всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1 , образуют ненулевые столбцы вида $s = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_{n-r} \varphi_{n-r}$. Здесь и далее собственные векторы матрицы будем обозначать буквой s .

Повторить пункты 3,4 для остальных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Пример 5.9 Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A . 1. Составляем характеристический многочлен матрицы

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(8-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 9\lambda + 8 + 6 = \lambda^2 - 9\lambda + 14.$$

$$2. \text{ Решаем характеристическое уравнение: } \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 7. \end{cases}$$

3(1). Для корня $\lambda_1 = 2$ составляем однородную систему уравнений $(A - \lambda_1 E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -2 \\ 3 & 8-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя расширенную матрицу системы к упрощенному виду

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ранг матрицы системы равен 1 ($r=1$), число неизвестных $n=2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из $d=n-r=1$ решения. Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = -2x_2$. Полагая $x_2 = 1$, получаем решение $\varphi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4(1). Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 2$: $s_1 = C_1 \cdot \varphi_1$, где C_1 – отличная от нуля произвольная постоянная.

Заметим, что, согласно **пункту 5 замечаний 7.5**, в качестве собственного вектора можно выбрать вектор, составленный из алгебраических дополнений элементов второй строки матрицы $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, то есть $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Умножив этот столбец на (-1) , получим φ_1 .

3(2). Для корня $\lambda_2 = 7$ составляем однородную систему уравнений $(A - \lambda_2 E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-7 & -2 \\ 3 & 8-7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя расширенную матрицу системы к упрощенному виду

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ранг матрицы системы равен 1 ($r=1$), число неизвестных $n=2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из $d=n-r=1$ решения. Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = -\frac{1}{3}x_2$. Полагая $x_2 = 1$, получаем решение $\varphi_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4(2). Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 7$: $s_2 = C_2 \cdot \varphi_2$, где C_2 – отличная от нуля произвольная постоянная.

Заметим, что, согласно **пункту 5 замечаний 7.5**, в качестве собственного вектора можно выбрать вектор, составленный из алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Поделив его на (-3), получим φ_2 .

Матрица B . 1. Составляем характеристический многочлен матрицы

$$\Delta_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

2. Решаем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2i, \\ \lambda_2 = 1 - 2i. \end{cases}$

3(1). Для корня $\lambda_1 = 1 + 2i$ составляем однородную систему уравнений $(B - \lambda_1 E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -4 \\ 1 & 1-(1+2i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя расширенную матрицу системы к упрощенному виду

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2i & -4 & 0 \\ 1 & -2i & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & 0 \\ -2i & -4 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ранг матрицы системы равен 1 ($r=1$), число неизвестных $n=2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из $d=n-r=1$ решения. Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = 2ix_2$. Полагая $x_2 = 1$, получаем решение $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

4(1). Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 1 + 2i$: $s_1 = C_1 \cdot \varphi_1$, где C_1 – отличная от нуля произвольная постоянная.

Заметим, что, согласно **пункту 5 замечаний 7.5**, в качестве собственного вектора можно выбрать вектор, составленный из алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы $\begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}$, то есть $\begin{pmatrix} -2i \\ -1 \end{pmatrix}$. Умножив этот столбец на (-1), получим φ_1 .

3(2). Для корня $\lambda_2 = 1 - 2i$ составляем однородную систему уравнений $(B - \lambda_2 E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-(1-2i) & -4 \\ 1 & 1-(1-2i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя расширенную матрицу системы к упрощенному виду

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2i & -4 & 0 \\ 1 & 2i & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2i & 0 \\ 2i & -4 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ранг матрицы системы равен 1 ($r=1$), число неизвестных $n=2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из $d=n-r=1$ решения. Выражаем базисную переменную x_1 через свободную: $x_1 = -2ix_2$. Полагая $x_2 = 1$, получаем решение $\varphi_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$.

4(2). Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 1-2i$: $s_2 = C_2 \cdot \varphi_2$, где C_2 – отличная от нуля произвольная постоянная.

Заметим, что, согласно **пункту 5 замечаний 7.5**, в качестве собственного вектора можно выбрать вектор, составленный из алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы $\begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} 2i \\ -1 \end{pmatrix}$. Умножив его на (-1) , получим φ_2 .

Матрица C . 1. Составляем характеристический многочлен матрицы

$$\Delta_C(\lambda) = \det(C - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2.$$

$$2. \text{ Решаем характеристическое уравнение: } -\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

3(1). Для корня $\lambda_1 = 3$ составляем однородную систему уравнений $(C - \lambda_1 E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя расширенную матрицу системы к упрощенному виду (ведущие элементы выделены полужирным курсивом):

$$\begin{aligned} (C - \lambda_1 E | 0) &= \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ранг матрицы системы равен 2 ($r=2$), число неизвестных $n=3$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из $d=n-r=1$ решения. Выражаем базисные

переменные x_1, x_2 через свободную x_3 : $\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3, \end{cases}$ и, полагая $x_3 = 1$, получаем решение $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4(1). Все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 3$, вычисляются по формуле $s_1 = C_1 \cdot \varphi$, где C_1 – отличная от нуля произвольная постоянная.

Заметим, что, согласно **пункту 5 замечаний 7.5**, в качестве собственного вектора можно выбрать вектор, составленный из алгебраических дополнений элементов первой строки

матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, то есть $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, так как

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

Разделив его на 3, получим φ .

3(2). Для собственного значения $\lambda_2 = 0$ имеем однородную систему $Cx = 0$. Решаем ее методом Гаусса:

$$(C - \lambda_1 E | 0) = (C | 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ранг матрицы системы равен единице ($r=1$), следовательно, фундаментальная система решений состоит из двух решений ($d=n-r=2$). Базисную переменную x_1 , выражаем через свободные: $x_1 = -x_2 - x_3$. Задавая стандартные наборы свободных переменных $x_2 = 1, x_3 = 0$ и

$$x_2 = 0, x_3 = 1, \text{ получаем два решения } \varphi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4(2). Записываем множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_2 = 0$: $s = C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные, не равные нулю одновременно. В частности, при $C_1 = 0, C_2 = -1$ получаем $s_1 = (1 \ 0 \ -1)^T$; при $C_1 = -1, C_2 = 0$: $s_2 = (1 \ -1 \ 0)^T$. Присоединяя к этим собственным векторам собственный вектор $s_3 = (1 \ 1 \ 1)^T$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 3$ (см. пункт 4(1) при $C_1 = 1$), находим три линейно независимых собственных вектора матрицы C :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для корня $\lambda_2 = 0$ собственный вектор нельзя найти, применяя **пункт 5 замечаний 7.5**, так как алгебраическое дополнение каждого элемента матрицы A равно нулю.

5.4 Теорема о диагональной матрице линейного оператора

Матрица линейного преобразования $A: V \rightarrow V$ n -мерного линейного пространства определяется относительно его базиса. Выбирая разные базисы, получаем разные матрицы одного и того же преобразования. Поэтому возникает задача приведения линейного преобразования к каноническому виду: требуется найти такой базис пространства V , в котором матрица преобразования имеет наиболее простой вид. Упрощение матрицы преобразования позволяет выяснить его структуру, представить в виде композиции простых преобразований. Например, если в некотором базисе матрица преобразования оказывается диагональной, то с геометрической точки зрения это преобразование сводится к гомотетиям вдоль каждого из направлений базисных векторов. Кроме того, приведение преобразований к каноническому виду позволяет сравнивать различные преобразования. Все преобразования, которые имеют одинаковый канонический вид, эквивалентны, так как обладают одинаковыми свойствами.

Гомотетией (от др.-греч. ὁμός — «одинаковый» и θέτος — «расположенный») с центром O и коэффициентом k ($k \neq 0$) называют преобразование подобия, переводящее точку X в точку X' , обладающую тем свойством, что вектор $OX' = kOX$. Гомотетию с центром O и коэффициентом k часто обозначают через H_O^k .

Говорят, что матрица линейного оператора A n -мерного линейного пространства V *приводится к диагональному виду*, если существует базис, в котором матрица A линейного оператора диагональная, т.е. $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — некоторые числа, среди которых могут быть равные. Если матрица линейного оператора A приводится к диагональному виду, то он называется *диагонализируемым*.

Теорема 5.10: Матрица линейного оператора A приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда в пространстве V существует базис из собственных векторов.

Доказательство: Действительно, предположим, что в базисе $s_1, s_2, \dots, s_n$ матрица преобразования имеет диагональный вид

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Найдем образ $A(s_1)$. Умножая матрицу A на координатный столбец $s_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ базисного вектора, получаем $As_1 = \lambda_1 s_1$. Значит, $A(s_1) = \lambda_1 s_1$, т.е. вектор s_1 является собственным, а преобразование A действует в подпространстве $\text{Lin } s_1$ как гомотетия (с коэффициентом λ_1). Аналогичный вывод можно сделать и про другие базисные векторы. Следовательно, базис пространства состоит из собственных векторов $s_1, s_2, \dots, s_n$. Необходимость доказана. Достаточность доказывается путем приведения тех же рассуждений, но в обратном порядке.

Критерий диагонализируемости линейного преобразования можно сформулировать иначе.

Теорема 5.11 Пусть f — линейный оператор n -мерного пространства V над полем P . Оператор f диагонализуем тогда и только тогда, когда в V есть n линейно независимых собственных векторов оператора f .

Лемма 5.12 Собственные векторы линейного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, образуют линейно независимую систему.

Теорема. Пусть f — линейный оператор n -мерного линейного пространства V над полем P . Если все корни характеристического многочлена оператора f принадлежат полю P и различны, то f диагонализуем.

Теорема 5.12 (о диагонализируемости линейного преобразования (оператора))

Для того чтобы линейное преобразование (оператор) приводилось к диагональному виду, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического многочлена являлись собственными значениями преобразования и геометрическая кратность каждого собственного значения была равна его алгебраической кратности.

Следствие 5.13 Если характеристическое уравнение линейного преобразования комплексного (вещественного) пространства имеет n попарно различных комплексных (действительных) корней (др. словами, преобразование имеет простой спектр), то это преобразование приводится к диагональному виду.

Следствие 5.14 Если сумма размерностей всех собственных подпространств линейного оператора $f: V \rightarrow V$ равна размерности линейного пространства V , то линейное преобразование приводится к диагональному виду.

Пример 5.15 Линейный оператор $f: V \rightarrow V$ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Привести это преобразование к диагональному виду, т.е. найти базис } s_1, s_2, s_3,$$

в котором матрица оператора имеет диагональный вид, и найти эту диагональную матрицу.

Решение. Задача сводится к нахождению собственных векторов и собственных значений преобразования. Применяем для их нахождения алгоритм, рассмотренный ранее.

1. Выбираем базис e_1, e_2, e_3 , в котором задана матрица преобразования.

2-5. Собственные значения и собственные векторы этой матрицы, а также ее диагональный вид следующий:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3, s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A(s) = \text{diag}(0; 0; 3).$$

Осталось по координатным столбцам s_1, s_2, s_3 записать искомый базис

$$s_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 = e_1 - e_3, s_2 = e_1 - e_3, s_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

5.5 Методы построения диагональной матрицы

Существуют несколько вариантов решения задачи приведения матрицы линейного оператора к наиболее простой форме. Предпочтительнее является приведение матрицы оператора к диагональному виду.

Пусть дана квадратная матрица A порядка n . Если возможно из каких-либо n собственных векторов матрицы A , соответствующих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, записанных в столбцы, построить квадратную невырожденную матрицу S порядка n , то

будет выполняться соотношение $S^{-1}AS = \Lambda$, где $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ – диагональная

матрица с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A по диагонали. При этом говорят, что матрица A приводится матрицей S к диагональному виду. Матрица A в этом случае называется матрицей простой структуры. К матрицам простой структуры относятся симметрические матрицы и матрицы простого спектра. *Матрицы простого спектра* – это те матрицы, у которых все собственные значения различны и их число совпадает с порядком матрицы.

Из соотношения $S^{-1}AS = \Lambda$ получается соотношение $A = SAS^{-1}$ – каноническое разложение матрицы A .

Если матрицу S , удовлетворяющую соотношению $S^{-1}AS = \Lambda$, построить нельзя, то матрица A не приводится к диагональному виду, и, следовательно, не обладает каноническим разложением.

При конструировании матрицы S для соотношений $S^{-1}AS = \Lambda$ и $A = SAS^{-1}$ нужно найти все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A и при каждом собственном значении λ_i построить фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы уравнений $(A - \lambda_i E)X = 0$. Из решений всех таких ФСР, как из столбцов, составить матрицу S . Причём в матрице S столбцами записываются решения по каждому λ_i в порядке нумерации собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (одинаковые λ_i считаются столько раз, какова их

кратность). Если матрица S окажется квадратной, то она будет удовлетворять соотношениям $S^{-1}AS = \Lambda$ и $A = SAS^{-1}$. Если же матрица S окажется неквадратной, то матрицы A не приводятся к диагональному виду и, следовательно, не имеют канонического разложения.

Из алгоритма построения ФСР вытекает, что построение оно неоднозначно. Поэтому будет неоднозначным и построение матрицы S для соотношений $S^{-1}AS = \Lambda$ и $A = SAS^{-1}$.

Пример 5.16 Матрица линейного преобразования f в некотором фиксированном базисе

$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ имеет вид $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти собственные числа, собственные векторы

преобразования f и (если это возможно) базис, в котором матрица f имеет диагональный вид.

Решение. Характеристический многочлен преобразования f имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3.$$

Так как $(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3$, то собственные значения f таковы: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Составим систему уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих

корням $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$:
$$\begin{cases} (3-\lambda_i)x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ (2-\lambda_i)x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda_i)x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем собственные векторы для $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 0x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 + x_2, \\ x_1, x_2 \in R. \end{cases}$$

Если $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$, – первое фундаментальное решение и $g_1 = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3$ – есть собственный вектор для $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Если $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$, – второе фундаментальное решение и $g_2 = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3$ – есть собственный вектор для $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Легко показать, что векторов g_1, g_2 недостаточно для конструирования квадратной невырожденной матрицы 3-го порядка. Поэтому матрица A_f не приводится к диагональному виду, вследствие чего не имеет канонического разложения.

Пример 5.17 Пусть матрица линейного преобразования f в некотором фиксированном

базисе $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ имеет вид: $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Выяснить возможность приведения

действительной матрицы к диагональному виду.

Решение. Характеристический многочлен имеет вид $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ =(прибавим

$$\begin{aligned} & \text{(1)-й столбец ко (2)-му столбцу)} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\text{умножим (2)-ю строку на (-1) и} \\ & \text{прибавим к (1)-й строке)} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & -1 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda). \end{aligned}$$

Корнями характеристического многочлена матрицы A являются числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$. Все они действительные и поэтому являются собственными значениями матрицы A_f .

Составим систему уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих

$$\text{корням } \lambda_1 = \lambda_2 = 2: \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3\tilde{o}_1 + 3x_2 - \tilde{o}_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет общее решение $x_{i\ddot{a}i} = (x_1, x_2, -3x_1 + 3x_2)$, в котором два свободных неизвестных. Поэтому возьмём, например, определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Полагая в общем решении сначала $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, найдём $x_3 = -3$. Затем, положим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, найдём $x_3 = 3$, которые составляют ФСР рассматриваемой однородной системы уравнений:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Составим систему уравнений для нахождения собственных векторов, соответствующих

$$\text{корням } \lambda_3 = 1: \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3\tilde{o}_1 + 4x_2 - \tilde{o}_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет общее решение $s_3 = \begin{pmatrix} \tilde{o}_1 \\ \tilde{o}_1 \\ \tilde{o}_1 \end{pmatrix}$, в котором одно свободное неизвестное.

Поэтому ФСР состоит из одного решения, например, $s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Из решений s_1 , s_2 и s_3 , как из столбцов, составляется невырожденная квадратная

$$\text{матрица } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица A приводится к диагональному виду $S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и имеет

$$\text{каноническое разложение } A = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Поскольку приведение матрицы оператора к диагональному виду не всегда осуществим, так как не всякая матрица подобна диагональной. Другой вариант приведения матрицы линейного оператора к наиболее простой форме, состоит в приведении матрицы линейного оператора к так называемой жордановой нормальной форме.

Пусть P – некоторое поле, $a \in P$. Клеткой Жордана порядка n называется $n \times n$ -матрица, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

Обозначается клетка Жордана порядка n через $J_n(a)$.

Клеточно-диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(a) & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{k_2}(b) & & & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \dots & J_{k_t}(c) \end{pmatrix}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_t = n.$$

с клетками Жордана на главной диагонали называется жордановой матрицей или матрицей Жордана.

Если A – произвольная квадратная матрица над полем P и J – подобная ей матрица Жордана над полем P , то J называется *жордановой нормальной формой матрицы A* над полем P .

Теорема 5.18 Для существования жордановой нормальной формы $n \times n$ -матрицы над полем P необходимо и достаточно, чтобы характеристический многочлен этой матрицы имел n корней (с учетом их кратности), принадлежащих полю P .

Теорема 5.19 Две матрицы подобны тогда и только тогда, когда их жордановы нормальные формы состоят из одних и тех же клеток Жордана и различаются лишь расположением клеток Жордана на главной диагонали.

Алгоритм приведения $n \times n$ -матрицы A к жордановой нормальной форме J над полем P .

1) Находим все корни характеристического многочлена матрицы A и их кратности. Если хотя бы один корень не принадлежит полю P , то в виду теоремы задача решения не имеет.

2) Пусть λ – один из корней характеристического многочлена матрицы A и пусть k – его кратность. Определяем по формуле $l(\lambda) = n - \text{rang}(A - \lambda E)$ общее число $l(\lambda)$ клеток Жордана вида $J_t(\lambda)$, где $t = \overline{1, k}$, в матрице J . Затем определяем для $t = \overline{1, k}$ по формуле значение $l_t(\lambda) = \text{rang}(A - \lambda E)^{t+1} - 2\text{rang}(A - \lambda E)^t + \text{rang}(A - \lambda E)^{t-1}$ общее число $l_t(\lambda)$ клеток

Жордана порядка t с элементом λ на главной диагонали, входящих в матрицу J (по определению $(A - \lambda E)^0 = E$).

3) Повторяем 2-й шаг для всех корней характеристического многочлена матрицы A .

4) Расставляем клетки Жордана на главной диагонали матрицы J . В виду теоремы порядок расстановки клеток Жордана на главной диагонали матрицы J значения не имеет.

5.5 Линейные операторы в евклидовом пространстве

Пусть f – линейный оператор евклидова пространства V . Линейный оператор f^* называется сопряженным к оператору f , если для любых двух векторов $x, y \in V$ выполняется равенство

$$(f(x), y) = (x, f^*(y)). \quad (7.1)$$

Теорема 5.20 Для любого линейного оператора f конечномерного евклидова пространства V существует единственный сопряженный оператор f^* . При этом матрица оператора f^* в ортонормированном базисе будет транспонированной по отношению к матрице оператора f в этом базисе.

Линейный оператор f евклидова пространства V называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение векторов, т. е. если для любых $x, y \in V$ выполняется равенство:

$$(f(x), f(y)) = (x, y). \quad (7.2)$$

Теорема 5.21 (Первый критерий ортогональности линейного оператора) Линейный оператор f евклидова пространства V ортогонален тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов.

Теорема 5.22 (Второй критерий ортогональности линейного оператора) Для того, чтобы линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V был ортогональным необходимо и достаточно, чтобы оператор f переводил ортонормированный базис пространства V в ортонормированный базис.

Матрица $A \in M(n, R)$ называется *ортогональной*, если $A^T A = A A^T = E$. Здесь через A^T обозначается транспонированная матрица

Теорема 5.23 (Третий критерий ортогональности линейного оператора) Линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V ортогонален тогда и только тогда, когда ортогональна матрица оператора f в некотором ортонормированном базисе.

Линейный оператор f евклидова пространства V называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным оператором f^* . Из определения следует, что если оператор f является самосопряженным, то для всех $x, y \in V$ выполняется равенство $(f(x), y) = (x, f(y))$.

Квадратная матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется *симметрической*, если $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для любых i, j . Очевидно, что матрица A является симметрической тогда и только тогда, когда она совпадает со своей транспонированной матрицей.

Теорема 5.24 Линейный оператор f евклидова пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе пространства V является симметрической.

На важную роль ортогональных и самосопряженных операторов в общей теории линейных операторов евклидовых пространств указывает следующая теорема.

Теорема 5.25 1. Любой линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V можно представить в виде $f = hg$, где h – ортогональный оператор, g – самосопряженный оператор пространства V .

2. Любую действительную квадратную матрицу можно представить в виде произведения ортогональной и симметрической матриц.

Представление оператора f , указанное в пункте 1 теоремы 5.25 называется *полярным разложением*.

Ортогональным дополнением подпространства W евклидова пространства V называется множество $W^\perp$ всех векторов из V , каждый из которых ортогонален любому вектору из W :

$$W^\perp = \{x \in V \mid x \perp y \text{ для любого } y \in W\}.$$

Теорема 5.26 1. Для любого подпространства W евклидова пространства V множество $W^\perp$ является подпространством.

2. Если пространство V конечномерно, то $V = W \oplus W^\perp$.

3. Если W – подпространство конечномерного евклидова пространства V , то $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Лемма 5.27 Пусть f – самосопряженный линейный оператор конечномерного евклидова пространства V , W – подпространство V . Если подпространство W инвариантно относительно оператора f , то и подпространство $W^\perp$ инвариантно относительно f .

Лемма 5.28 Собственные значения самосопряженного оператора в евклидовом или унитарном пространстве являются действительными числами.

Теорема 5.29 1. Линейный оператор f конечномерного евклидова пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда в пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора f .

2. Самосопряженный линейный оператор конечномерного евклидова пространства является диагонализируемым оператором.

Лемма 5.30 Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису ортогональна.

Теорема 5.31 Для любой симметрической матрицы $A \in M(n, R)$ существует такая ортогональная матрица T , что TAT^{-1} – диагональная матрица.

Вопросы для самоконтроля:

1 Какое отображение называется линейным?

2 Что называется линейным оператором?